TD 30-31 : Permutations et déterminants

Permutations

Exercice 1. On définit la permutation $\sigma \in S_{10}$ par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints et en déduire sa signature $\varepsilon(\sigma)$.

Faire de même pour $\tau \in S_n$ ($n \geq 2$) définie par $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Dans S_n ($n \geq 2$), est-ce qu'il existe une permutation σ telle que $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Exercice 3. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Ordre d'une permutation)**.** Soit $\sigma \in S_n$. On définit l'ordre de σ comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$ (on admet qu'un tel k existe toujours).

1) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de σ.
2) Quel est l'ordre d'une transposition ? D'un 3-cycle ?
3) Quel est l'ordre d'un p-cycle ?
4) Quel est l'ordre de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?
5) Soit p, q des entiers premiers entre eux supérieurs ou égaux à 2. Soit c_p et c_q deux cycles de longueurs respectives p et q, à supports disjoints. On pose $\sigma = c_p c_q$ Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad \sigma^m = \mathrm{id} \iff pq \mid m$$

En déduire l'ordre de σ.

Exercice 5. On se place dans S_4 et on pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Calculer σ^2 et l'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$.
2) Décomposer σ^2 en produit de cycles à supports disjoints. On remarquera que σ^2 n'est pas un cycle. On dit que σ^2 est une double transposition.
3) Combien y a-t-il d'éléments (distincts) dans S_4 ? Donner les tous.

Exercice 6 ($\star$)**.** Dans S_n, soit $c = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un p-cycle et $\sigma \in S_n$. Montrer que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p-cycle que l'on précisera càd on déterminera $b_1, \cdots, b_p \in [\![1, n]\!]$ tels que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Calculer les déterminants suivants (avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ sauf pour le dernier où $a,b,c\in\mathbb{R}$) :

1) $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$$

3) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

4) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Exercice 8. Calculer les déterminants suivants (avec $a\in\mathbb{C}$) :

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
2) $$\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$
3) $$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix}$$
4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 9 (Déterminants de taille n)**.** Calculer les déterminants de taille n suivants (pour $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand pour que les expressions aient un sens)

$$d_n = \begin{vmatrix} & & \mathbf{0} & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & \ddots & & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & \mathbf{0} & & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & & & b \\ b & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a & b \\ b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b\in\mathbb{R}$$

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b\in\mathbb{R}$$

Exercice 10 ($\star$)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Applications des déterminants

Exercice 11. En calculant un déterminant, vérifier si les familles suivantes sont des bases de E.

1) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (2-i, 0, -i)$.
2) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1)$, $u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2+3X-1$, $P_2 = 2X^2-2X+3$, $P_3 = 3X^2+2X-4$.
4) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$.

Exercice 12. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = P - \alpha X P'$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer pour quelles valeurs de α l'application φ n'est pas bijective.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$ définie par $f(M) = AM$.

1) Rappeler quelle est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On la notera $\mathcal{B}_c$.
2) Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$.
3) Montrer que $\det f = (\det A)^2$. En déduire une CNS pour que f soit bijective.

Exercice 14 (Identité de Lagrange)**.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer l'identité suivante :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

Démontrer cette identité en calculant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$ de deux façons.

Exercice 15. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec a, b, c distincts. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ ax+by+cz = d \\ a^2x+b^2y+c^2z = d^2 \end{cases}$$

Comatrice

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si $\mathrm{rg}\, A = n$, alors $\mathrm{rg}\,(\mathrm{com}(A)) = n$.
2) On suppose que $\mathrm{rg}\, A = n-1$. On note f, g les morphismes canoniquement associés à A et à $(\mathrm{com} A)^\top$.
   (a) Déterminer le rang de f (resp. de g) en fonction de celui de A (resp. de $\mathrm{com} A$).
   (b) Déterminer la matrice $A(\mathrm{com}(A))^\top$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$.
   (d) En déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\mathrm{com} A) = (\det A)^{n-1}$.